Reproduced with permission of Academie des Sciences

46

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la solution de l'équation intégrale de M. V. Romanovsky*. Note de **M. R.-A. Fisher**, présentée par M. Émile Borel.

En 1915, j'ai fait connaître [2] la distribution des moments du second ordre d'une série de s épreuves de deux quantités variables à distribution normale sous une forme, qui, suivant la notation de M. V. Romanovsky [3],

[2] *Biometrika*, **10**, 1915, p. 507.
[3] *Comptes rendus*, **180**, 1925, p. 1897-1899.

Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, 181: 88-89, (1925).

peut s'écrire

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{2^{s-3}}{\pi(s-3)!}(AB - C^2)^{\frac{s-1}{2}} e^{-A\xi - B\eta + 2C\zeta}(\xi\eta - \zeta^2)^{\frac{s-4}{2}},$$

M. Romanovsky arrive, par une méthode très élégante, à l'équation intégrale

$$\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta, \zeta)\, e^{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta}\, d\zeta = \varphi(\alpha, \beta, \gamma),$$

où

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = (AB - C^2)^{\frac{s-1}{2}} \left\{(A-\alpha)(B-\beta) - \left(C + \frac{1}{2}\gamma\right)^2\right\}^{-\frac{s-1}{2}}$$

Il est évident que ζ, le moment des produits, ne se trouve jamais hors des limites $\pm\sqrt{\xi\eta}$; par conséquent l'équation intégrale peut s'écrire

$$\int_0^\infty d\xi \int_0^\infty d\eta \int_{-\sqrt{\xi\eta}}^{+\sqrt{\xi\eta}} f(\xi, \eta, \zeta)\, e^{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta}\, d\zeta = \varphi(\alpha, \beta, \gamma).$$

Pour montrer que cette équation est satisfaite par la solution donnée ci-dessus, remarquons que

$$\int_{-\sqrt{\xi\eta}}^{+\sqrt{\xi\eta}} e^{(2C+\gamma)\zeta}(\xi\eta - \zeta^2)^{\frac{s-4}{2}}\, d\zeta = (\xi\eta)^{\frac{s-3}{2}} \int_{-1}^{+1} e^{kt}(1-t^2)^{\frac{s-4}{2}}\, dt$$

$$= (\xi\eta)^{\frac{s-3}{2}} \sum_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2g+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2g-1}{2}\right)} \frac{k^{2g}}{(2g)!} \right\}$$

$$= \sum_0^\infty \left\{ (\xi\eta)^{\frac{s+2g-3}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{s+2g-1}{2}\right)} \frac{\left(C+\frac{1}{2}\gamma\right)^{2g}}{g!} \right\}$$

$$\left[k = (2C+\gamma)\sqrt{\xi\eta}\right].$$

En intégrant par rapport à ξ et η, on trouve

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-2}{2}\right)\sqrt{\pi}}{(A-\alpha)^{\frac{s-1}{2}}(B-\beta)^{\frac{s-1}{2}}} \sum_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{s+2g-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) g!} \frac{\left(C+\frac{1}{2}\gamma\right)^{2g}}{(A-\alpha)^g (B-\beta)^g} \right\}$$

* $$= \frac{\pi(s-3)!}{2^s}\left\{(A-\alpha)(B-\beta) - \left(C+\frac{1}{2}\gamma\right)^2\right\}^{-\frac{s-1}{2}}$$

et l'équation est satisfaite.

* For 2^s, read 2^{s-3}.